Министерство образования Новосибирской области

ГБПОУ НСО «Новосибирский авиационный технический колледж имени Б.С.Галущака»

Самостоятельная работа №2

**Задача коммивояжера**

Учебная дисциплина: Математические методы

Работу выполнила:

студентка группы ПР – 395,

Косолапова Е.Ю.

2020

**Дана задача такого вида:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **1** |  | 5 | 5 | 5 | 8 | 5 | 5 | 5 | 8 | 5 |
| **2** | 5 |  | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 |
| **3** | 8 | 5 |  | 5 | 8 | 5 | 5 | 8 | 5 | 5 |
| **4** | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 |
| **5** | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 5 | 8 | 5 | 5 |
| **6** | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 5 | 8 | 8 |
| **7** | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 8 | 5 |
| **8** | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 5 | 8 |
| **9** | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 5 |
| **10** | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 8 |  |

**Цифры** с жирным начертанием являются идентификационными номерами объектов, а числа в матрице – оценками маршрута из одного пункта в другой. **Знак ∞** означает, что перехода из пункта i (строка матрицы) в пункт j (столбец матрицы) не существует.

**Суть задачи коммивояжера** состоит в том, что коммивояжер выезжает из исходного пункта, объезжает все остальные и возвращается в исходный пункт. При этом порядок посещения пунктов не обязательно должен совпадать с порядком выбора дуг маршрута. По каждой дуге можно двигаться только один раз. Элементы матрицы Cij при i=j не существуют, так как получается, что коммивояжер выйдет и придет в один и тот же пункт.

Для того, чтобы можно было получить решение задачи, нужно, чтобы в каждой строке и каждом столбце был хотя бы один ноль. Приведение матрицы к такому виду осуществляется путем вычитания min элемента каждой строки и, если необходимо, min элемента столбца. Такие элементы называются **приводящими константами**.

**Решим задачу 1 способом:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **Приводящие константы** |
| **1** |  | 5 | 5 | 5 | 8 | 5 | 5 | 5 | 8 | 5 | 5 |
| **2** | 5 |  | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 | 5 |
| **3** | 8 | 5 |  | 5 | 8 | 5 | 5 | 8 | 5 | 5 | 5 |
| **4** | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 8 | 8 | 5 | 8 | 8 | 5 |
| **5** | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 5 | 8 | 5 | 5 | 5 |
| **6** | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 5 | 8 | 8 | 5 |
| **7** | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 8 | 8 | 5 | 5 |
| **8** | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 5 | 8 | 5 |
| **9** | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 |  | 5 | 5 |
| **10** | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 5 | 8 | 8 |  | 5 |

Выше показано нахождение приводящих констант. Ниже сформирована приведенная матрица и рассчитаны штрафы для нулевых элементов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **1** |  |  |  |  | 3 |  |  |  | 3 |  |
| **2** |  |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **3** | 3 |  |  |  | 3 |  |  | 3 |  |  |
| **4** |  | 3 |  |  | 3 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** | 3 |  | 3 |  |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  | 3 |  | 3 |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

В данной матрице выбирается дуга (1;2). Значит нужно вычеркнуть строку 1 и столбец 2. Затем следует рассчитать: Далее следует произвести вычеркивание строки и столбца, содержащие исключаемый элемент (показано на рисунке выше) и сформировать новую матрицу, закрыв элемент (=∞):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **2** |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **3** | 3 |  |  | 3 |  |  | 3 |  |  |
| **4** |  |  |  | 3 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** | 3 | 3 |  |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  |  | 3 |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 | 3 |  | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  |  | 3 |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  |  | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что матрица уже приведенная, следовательно, сумма приводящих констант новой матрицы равна0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (1,2). В данной матрице выбирается дуга (2,5). Затем следует рассчитать : . Далее производятся действия, аналогичные тем, которые были описаны выше, то есть формирование новой матрицы. Проводится проверка цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **3** | **4** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **3** | 3 |  |  |  |  | 3 |  |  |
| **4** |  |  |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  |  | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 | 3 |  |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  |  | 3 | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 | 3 |  |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что матрица уже приведенная, следовательно, сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (2,5). В данной матрице выбирается дуга (3,4). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Новых звеньев нет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **3** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **4** |  |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** |  | 3 | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что сумма приводящих констант данной матрицы равна 0. Так как в предыдущей матрице был исключен элемент с индексами (3,4), то в новой матрице закрывается элемент с индексами (4,3). Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (3,4). В данной матрице выбирается дуга (4,1). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **3** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **5** |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

Сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (4,1). В данной матрице выбирается дуга (5,7). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **3** | **6** | **8** | **9** | **10** |
| **6** |  |  |  | 3 | 3 |
| **7** |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  | 3 |  |  | 3 |
| **9** | 3 |  |  |  |  |
| **10** |  | 3 | 3 | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что сумма приводящих констант данной матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (5,7). В данной матрице выбирается дуга (8,9). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Новых звеньев нет.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **3** | **6** | **8** | **10** |
| **6** |  |  |  | 3 |
| **7** |  |  | 3 |  |
| **9** | 3 |  |  |  |
| **10** |  | 3 | 3 |  |

После формирования матрицы стало видно, что матрица приведенная, следовательно, сумма приводящих констант данной матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (8,9). В данной матрице выбирается дуга (6,8). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **3** | **6** | **10** |
| **7** |  |  |  |
| **9** | 3 |  |  |
| **10** |  | 3 |  |

Сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Значит можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (6,8). В данной матрице выбирается дуга (10,3). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **6** | **10** |
| **7** |  |  |
| **9** |  |  |

На данном этапе матрица приведена к размерности 2\*2, то есть дальнейшие вычисления производить нерационально. Получены последние дуги маршрута: (7,6) и (9,10), с оценками подмножеств, равными 50. Из полученных дуг маршрута можно сформировать цепочку посещения пунктов коммивояжером.

Формируется цепочка:

Оценка полученного маршрута:

Данное решение является одним из множеств решений, т.к. на каждом шаге при выборе другой переменой для разбиения с той же величиной штрафа, на следующем шаге будет выбрана дуга, входящая в полученное решение. Таким образом, решения будут отличаться только последовательностью переменных, что не влияет на итоговый ответ.

**Второй способ решения задачи:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **1** |  |  |  |  | 3 |  |  |  | 3 |  |
| **2** |  |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **3** | 3 |  |  |  | 3 |  |  | 3 |  |  |
| **4** |  | 3 |  |  | 3 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** | 3 |  | 3 |  |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  | 3 |  | 3 |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  | 3 |  | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

В данной матрице выбирается дуга (1;3). Значит нужно вычеркнуть строку 1 и столбец 3. Затем следует рассчитать: Далее следует произвести вычеркивание строки и столбца, содержащие исключаемый элемент (показано на рисунке выше) и сформировать новую матрицу, закрыв элемент (=∞):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **2** |  |  | 3 |  | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **3** |  |  |  | 3 |  |  | 3 |  |  |
| **4** |  | 3 |  | 3 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** | 3 |  |  |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** |  | 3 | 3 |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** | 3 |  |  | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** |  | 3 | 3 |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** | 3 |  |  | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** |  | 3 | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что матрица уже приведенная, следовательно, сумма приводящих констант новой матрицы равна0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (1,3). В данной матрице выбирается дуга (2,1). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку проверка цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **3** |  |  | 3 |  |  | 3 |  |  |
| **4** | 3 |  | 3 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** |  |  |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** | 3 | 3 |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** |  |  | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** | 3 | 3 |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** |  |  | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** | 3 | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что сумма приводящих констант данной матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (2,1). В данной матрице выбирается дуга (3,4). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **4** |  | 3 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| **5** |  |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **6** | 3 |  |  | 3 |  | 3 | 3 |
| **7** |  | 3 |  |  | 3 | 3 |  |
| **8** | 3 |  | 3 |  |  |  | 3 |
| **9** |  | 3 |  | 3 |  |  |  |
| **10** | 3 |  | 3 |  | 3 | 3 |  |

Сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Так как в предыдущей матрице был исключен элемент с индексами (3,4), то в новой матрице закрывается элемент с индексами (4,3). Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (3,4). В данной матрице выбирается дуга (4,8). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2** | **5** | **6** | **7** | **9** | **10** |
| **5** |  |  | 3 |  |  |  |
| **6** | 3 |  |  | 3 | 3 | 3 |
| **7** |  | 3 |  |  | 3 |  |
| **8** |  |  | 3 |  |  | 3 |
| **9** |  | 3 |  | 3 |  |  |
| **10** | 3 |  | 3 |  | 3 |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (4,1). В данной матрице выбирается дуга (6,5). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Новых звеньев нет.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2** | **6** | **7** | **9** | **10** |
| **5** |  |  |  |  |  |
| **7** |  |  |  | 3 |  |
| **8** |  | 3 |  |  | 3 |
| **9** |  |  | 3 |  |  |
| **10** | 3 | 3 |  | 3 |  |

Сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (6,5). В данной матрице выбирается дуга (10,7). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Новых звеньев нет.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **2** | **6** | **9** | **10** |
| **5** |  |  |  |  |
| **7** |  |  | 3 |  |
| **8** |  | 3 |  | 3 |
| **9** |  |  |  |  |

После формирования новой матрицы стало видно, что матрица уже приведенная, следовательно, сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (10,7). В данной матрице выбирается дуга (8,9). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: . Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **2** | **6** | **10** |
| **5** |  |  |  |
| **7** |  |  |  |
| **9** |  |  |  |

Сумма приводящих констант новой матрицы равна 0. Теперь можно рассчитать: . При сравнении полученного результата с результатом при расчете можно сделать вывод, что дальнейшему разбиению подлежит подмножество, т.е. содержащее дугу (8,9). В данной матрице выбирается дуга (5,10). Затем следует рассчитать : . Далее формируем новую матрицу. Проводим проверку цепочек: . Формируется цепочка: Из этого следует, что закрывается элемент =∞.

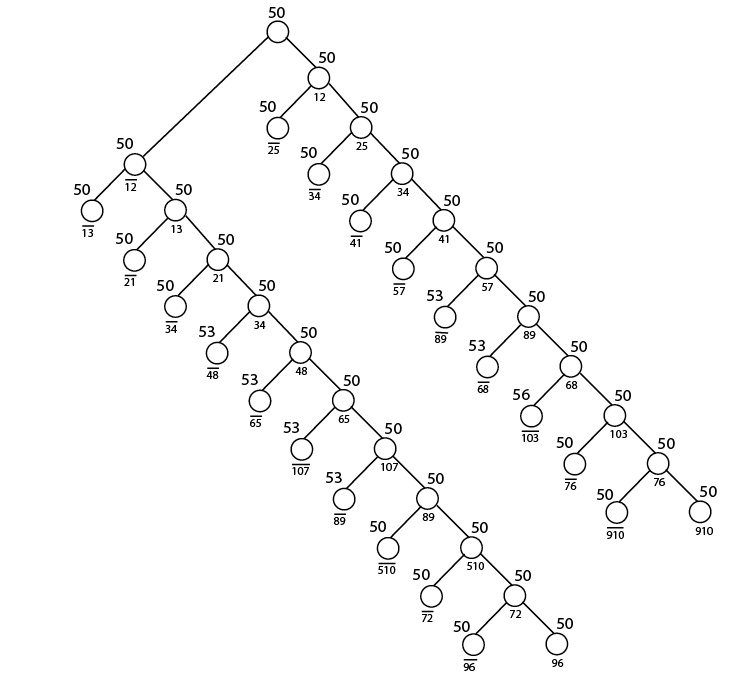
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **2** | **6** |
| **7** |  |  |
| **9** |  |  |

На данном этапе матрица приведена к размерности 2\*2, то есть дальнейшие вычисления производить нерационально. Получены последние дуги маршрута: (7,2) и (9,6), с оценками подмножеств, равными 50. Из полученных дуг маршрута можно сформировать цепочку посещения пунктов коммивояжером.

Формируется цепочка:

Оценка полученного маршрута:

Ниже представлена древовидная структура решения задачи, где вершинами являются подмножества и , взятые с их оценками. Левый сын (левая ветвь) - это подмножество , а правый - . Корнем дерева является оценка подмножеств . Порядок построения ярусов совпадает с порядком вычисления дуг маршрута.



**Вывод:** в ходе самостоятельной работы, были найдены оптимальные пути двумя способами решений из множества возможных.